34　体積

基本問題 & 解法のポイント

56

$y=x+\cos x$ より，$y'=1-\sin x\geq 0$

よって，y は単調に増加する。

これと，$x=0$ のとき $y=1$ であることから，$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において $y>0$

よって，求める体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)^2dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2+2x\cos x+\cos^2 x\right)dx$$
$$=\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\right)$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\sin x)'dx$$
$$=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$$
$$=\left[x\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore V=\pi\left(\frac{\pi^3}{24}+\pi-2+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{24}\left(\pi^3+30\pi-48\right)$$

57

略解

(1)

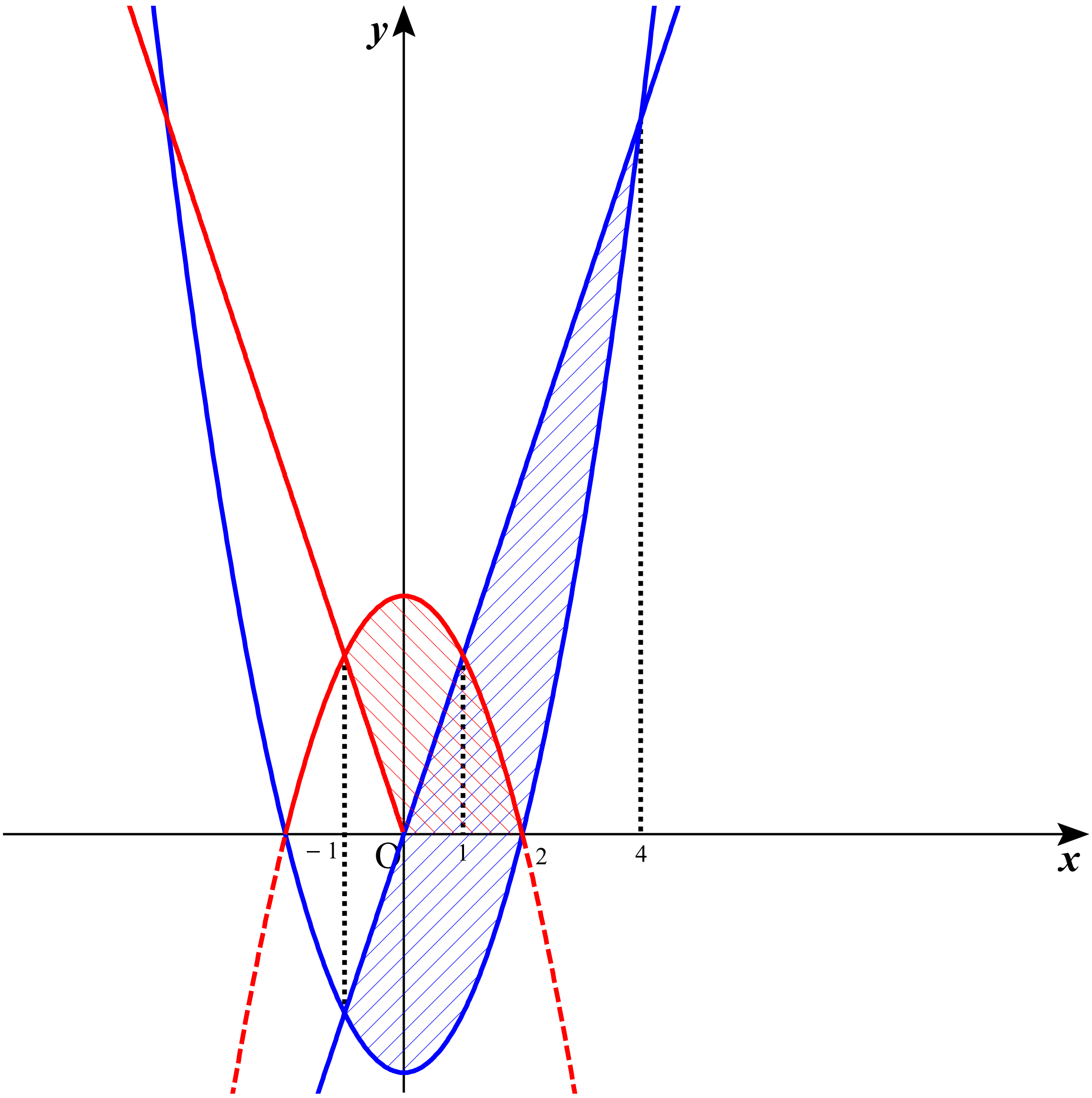
$x^2-4=3x$ より，　$x=-1,\ 4$

よって，$(-1,\ -3),\ (4,\ 12)$

(2)

下図より，

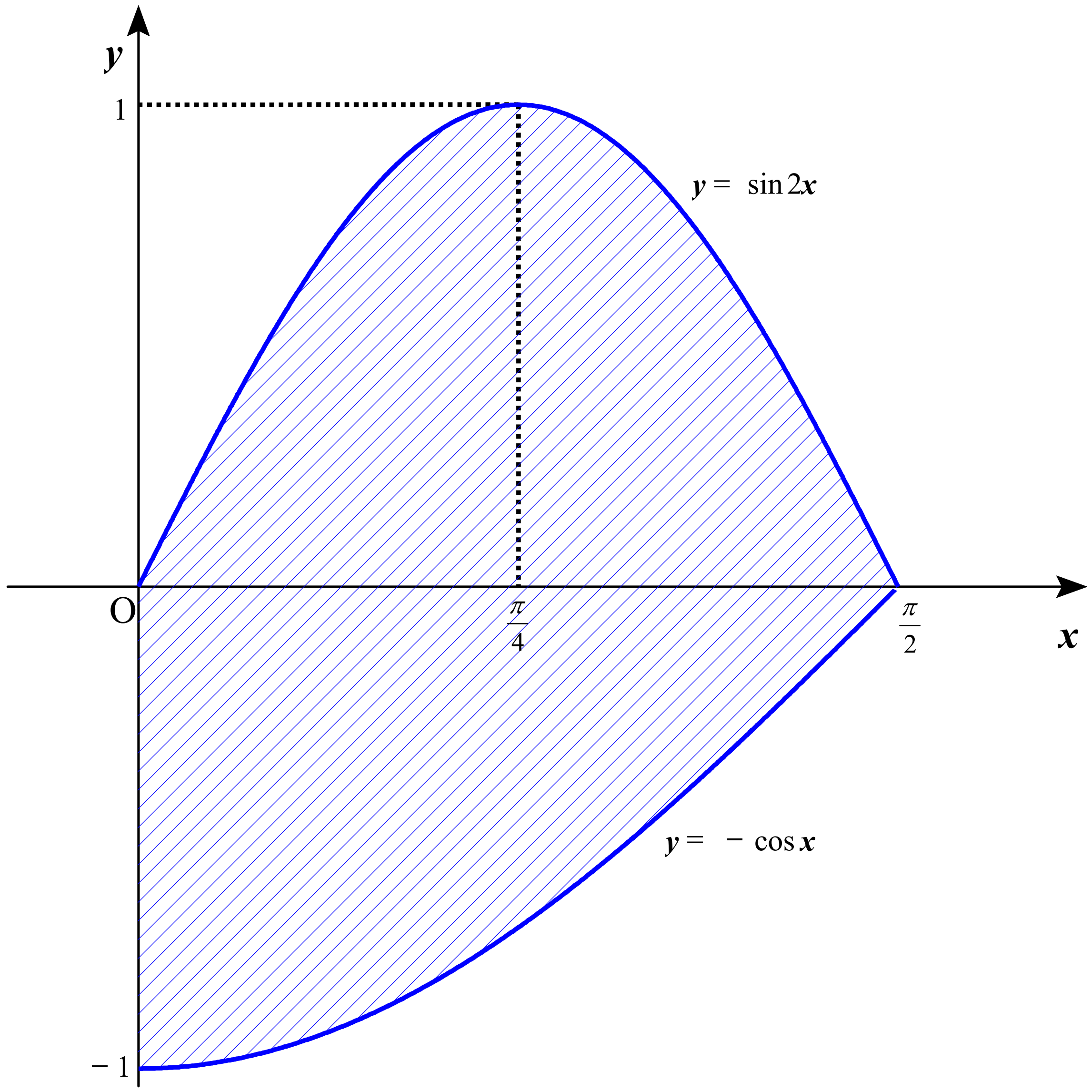
$$\pi\int_{-1}^{1}\left(-x^2+4\right)^2dx+\pi\int_{1}^{4}(3x)^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx-\pi\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)^2dx=132\pi$$



202

(1)

境界を含む斜線部が領域 D



(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin 2x - (-\cos x)\}dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2} + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2$$

(3)

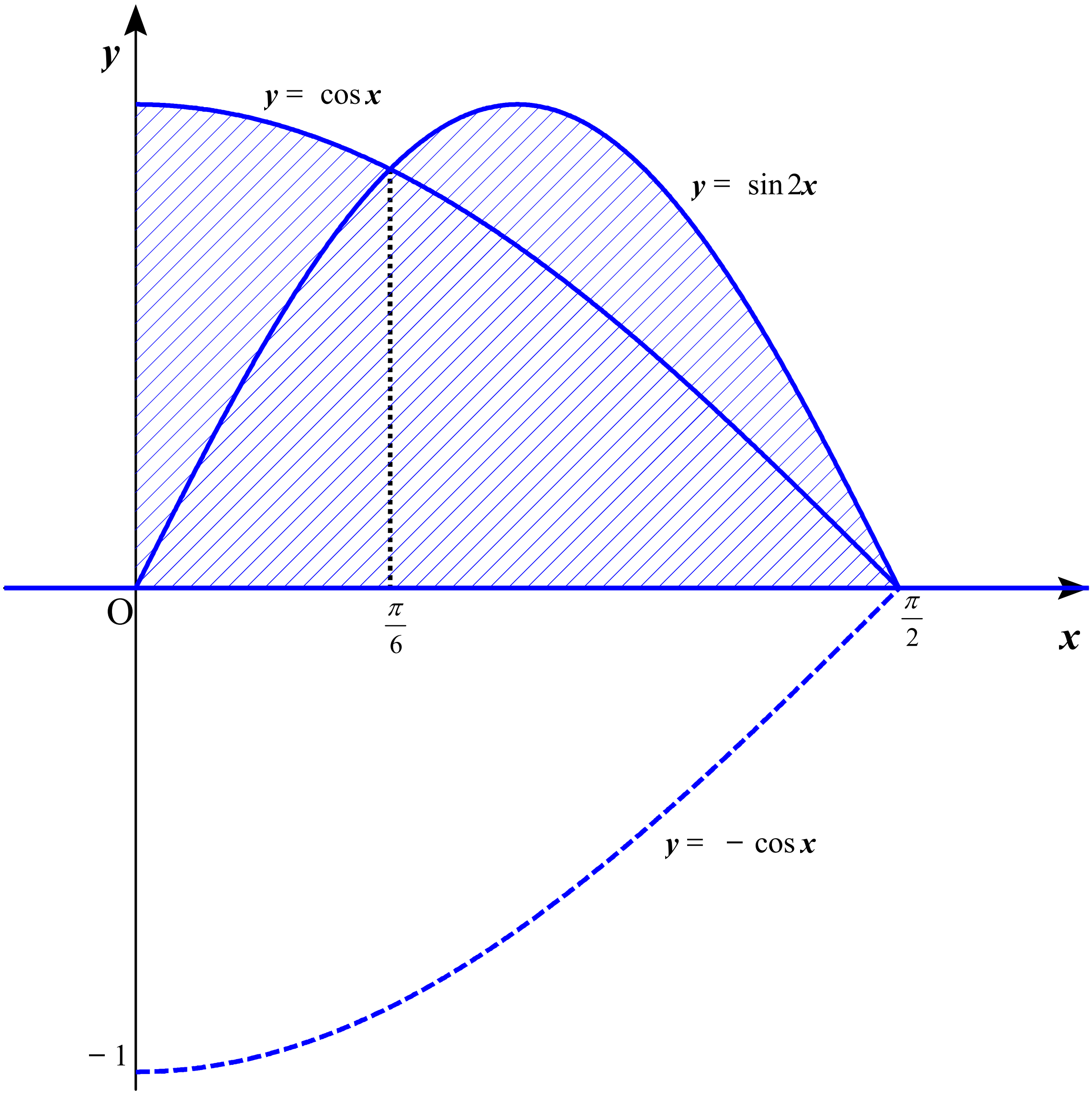
求める体積は下図の境界を含む斜線部を x 軸の周りに 1 回転したときにできる立体の体積と同じである。

よって，

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x)^2\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x)^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{16}\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)$$



203

(1)

$0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leq \sin t \leq 1$　$\therefore 0 \leq x \leq 1$　・・・①

$$
\begin{aligned}
y &= \sin 2t \\
&= 2\sin t \cos t \\
&= 2\sin t\sqrt{1-\cos^2 t} \quad \left(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2x\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}
$$

これと①より，$y = 2x\sqrt{1-x^2}\ (0 \leq x \leq 1)$

(2)

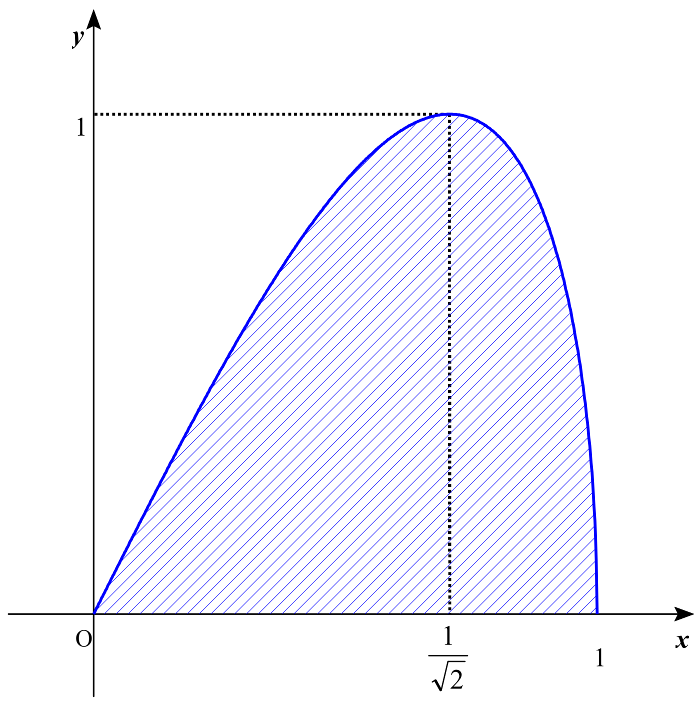
$\left\{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}' = \dfrac{3}{2}\cdot(-2x)\sqrt{1-x^2} = -3x\sqrt{1-x^2}$，$0 \leq x \leq 1$において$2x\sqrt{1-x^2} \geq 0$ より，

$$
\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}
$$

(3)

解法 1：略解

図形 D は次図



$y=2x\sqrt{1-x^2}$ より，　$y^2=4x^2(1-x^2)$　$\therefore 4(x^2)^2-4x^2+y^2=0$

$\therefore x^2=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4y^2}}{4}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{2}$

$0\le x\le 1$ より，　$\therefore x=\sqrt{\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{2}}$

ここで，　$x_1=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{2}}$，　$x_2=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{2}}$ とおくと，

$x_1{}^2=\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{2}$，　$x_2{}^2=\dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{2}$

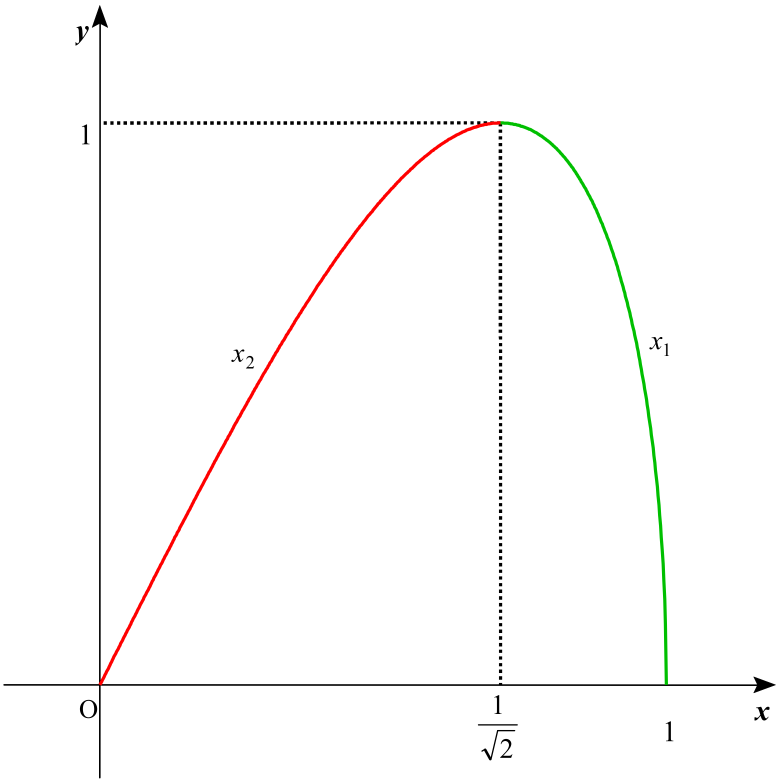
求める体積を V とすると，

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^1 x_1{}^2dy-\pi\int_0^1 x_2{}^2dy\\
&=\pi\int_0^1\left(x_1{}^2-x_2{}^2\right)dy\\
&=\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy
\end{aligned}
$$

$x=\sqrt{1-y^2}$ $(0\le y\le 1)$ とおくと，　$x^2+y^2=1$ $(0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1)$ と変形できるから，

$\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy$ は半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ である。

$$
\begin{aligned}
\therefore V&=\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy\\
&=\pi\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4}\\
&=\frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$



解法 **2**：バウムクーヘン

$$\int_0^1 2\pi\, x\cdot y\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin t\cdot \sin 2t\cdot \frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\cos^2 t dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[t-\frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}$$

補足

$(x,\ y)$, $(x,\ 0)$, $(x+dx,\ 0)$, $(x+dx,\ y)$ を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は $2\pi x\cdot y\cdot dx$

204

(1)

原点を定点とする直線 PQ 上の点を R，k を実数とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 \\ 2 + \sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 + k(\cos\theta - 1) \\ k(2 + \sin\theta) \\ 1 - k \end{pmatrix}$$

と表せる。

よって，$\mathrm{R}\left(1 + k(\cos\theta - 1),\ k(2 + \sin\theta),\ 1 - k\right)$

したがって，$z = t$ のとき $1 - k = t$ より，$k = 1 - t$

よって，

$$(\alpha,\ \beta,\ t) = \left(1 + (1 - t)(\cos\theta - 1),\ (1 - t)(2 + \sin\theta),\ t\right)$$
$$= \left(t(1 - \cos\theta) + \cos\theta,\ -t(2 + \sin\theta) + (2 + \sin\theta),\ t\right)$$

ゆえに，

$$\alpha^2 + \beta^2 = \{t(1 - \cos\theta) + \cos\theta\}^2 + \{-t(2 + \sin\theta) + (2 + \sin\theta)\}^2$$
$$= \left\{(1 - \cos\theta)^2 + (2 + \sin\theta)^2\right\}t^2 + 2\left\{\cos\theta(1 - \cos\theta) - (2 + \sin\theta)^2\right\}t + \cos^2\theta + (2 + \sin\theta)^2$$
$$= 2(2\sin\theta - \cos\theta + 3)t^2 - 2(4\sin\theta - \cos\theta + 5)t + 4\sin\theta + 5$$

(2)

求める体積を V とすると，$\pi\left(\alpha^2 + \beta^2\right)dt$ だから，

$$dV = \pi\left(\alpha^2 + \beta^2\right)dt$$
$$= \pi\left\{2(2\sin\theta - \cos\theta + 3)t^2 - 2(4\sin\theta - \cos\theta + 5)t + 4\sin\theta + 5\right\}dt$$

より，

$$V = \pi\int_0^1 \left\{2(2\sin\theta - \cos\theta + 3)t^2 - 2(4\sin\theta - \cos\theta + 5)t + 4\sin\theta + 5\right\}dt$$
$$= \pi\left[\frac{2(2\sin\theta - \cos\theta + 3)}{3}t^3 - (4\sin\theta - \cos\theta + 5)t^2 + (4\sin\theta + 5)t\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi(4\sin\theta + \cos\theta + 6)}{3}$$

(3)

$$V=\frac{\pi(4\sin\theta+\cos\theta+6)}{3}$$
$$=\frac{\pi\left\{\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)+6\right\}}{3}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$-1\le\sin(\theta+\alpha)\le 1$ より，

体積の最大値は $\dfrac{6+\sqrt{17}}{3}\pi$，最小値は $\dfrac{6-\sqrt{17}}{3}\pi$

205

(1)

$$\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$=\int_0^1 dt-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$=[t]_0^1-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$
$$=1-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$ について，

$t=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$，$t=1\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$t=0\Rightarrow\theta=0$ より，

$$\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$
$$=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

よって，$\displaystyle\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt=1-\frac{\pi}{4}$

(2)

$0 \leq x^2 + y^2 \leq \log 2 - \log(1+z^2)$ より，$\log 2 - \log(1+z^2) \geq 0$

よって，$1+z^2 \leq 2$ より，$-1 \leq z \leq 1$

また，$\log 2 - \log(1+z^2) = \log 2 - \log\{1-(-z)^2\}$ より，

$x^2 + y^2 \leq \log 2 - \log(1+z^2)$ $(-1 \leq z \leq 1)$ の定める立体は xy 平面に関して対称である。

よって，高さ dz の微小部分の体積を dV とすると，$dV = \pi\{\log 2 - \log(1+z^2)\}dz$ より，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1}\{\log 2 - \log(1+z^2)\}dz \\
&= 2\pi\int_0^1\{\log 2 - \log(1+z^2)\}dz \\
&= 2\pi\left\{\int_0^1 \log 2dz - \int_0^1 \log(1+z^2)dz\right\} \\
&= 2\pi\left[\log 2 - \left\{\left[z\log(1+z^2)\right]_0^1 - \int_0^1 z\cdot\frac{2z}{1+z^2}dz\right\}\right] \\
&= 4\pi\int_0^1\frac{z^2}{1+z^2}dz \\
&= 4\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi(4-\pi)
\end{aligned}
$$

206

(1)

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ について

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ より，$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \geq 0$

よって，$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ $(0 \leq x \leq a)$

$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ は $0 < x < a$ において微分可能で，

$$y' = 2\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{x})'(\sqrt{a}-\sqrt{x}) = -\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < 0$$

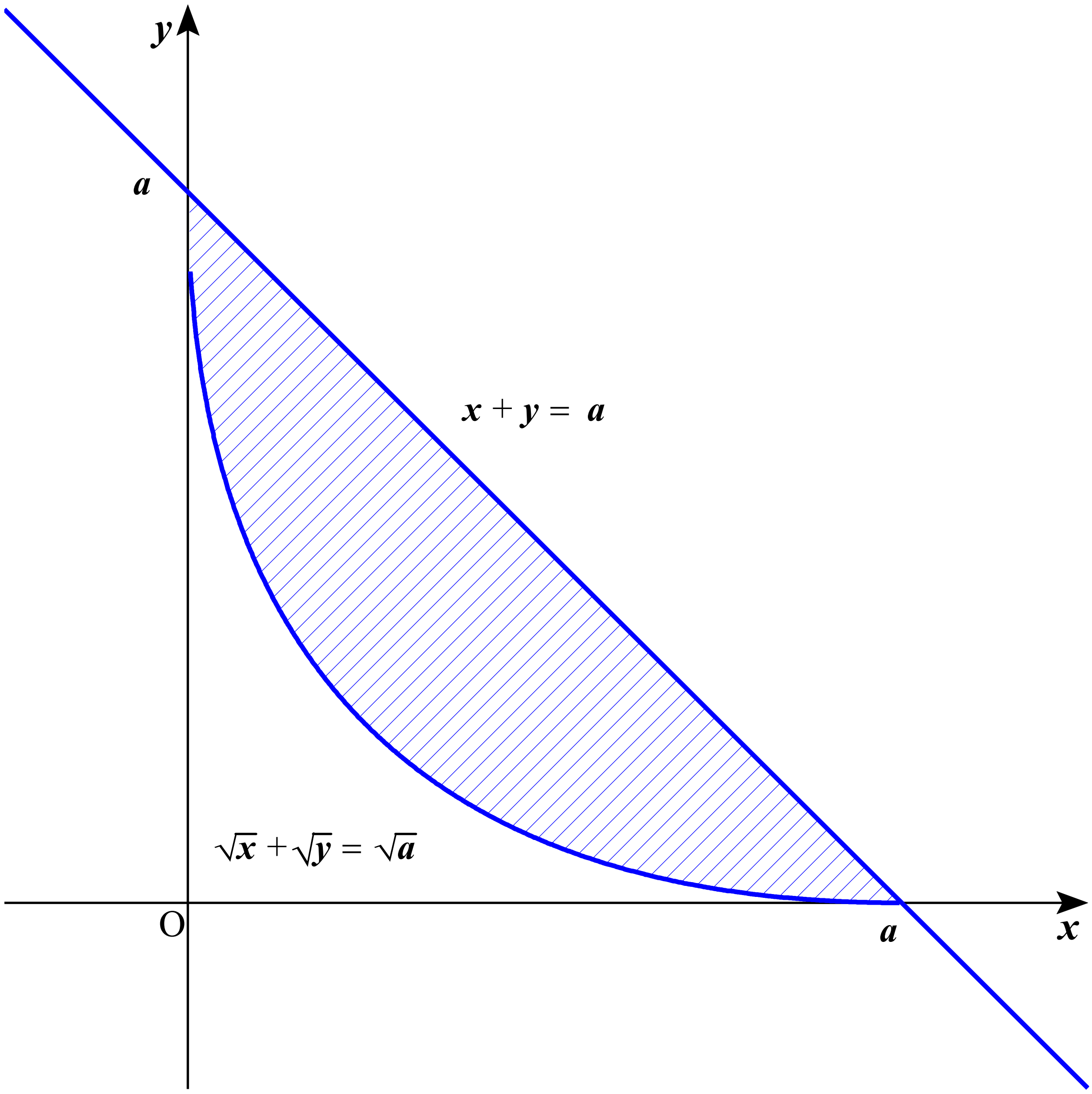
$$y'' = \left(1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sqrt{a}}{2}x^{-\frac{3}{2}} > 0$$

よって，$y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ は単調減少し，かつ，下に凸な曲線である。

$x + y = a$ について

$(a,\ 0),\ (0,\ a)$ を通る直線である。

よって，D の概形は下図の境界を含む斜線部である。



また，その面積は

$$\frac{1}{2}a^2-\int_0^a\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2dx=\frac{1}{2}a^2-\int_0^a\left(a-2\sqrt{ax}+x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}a^2-\left[ax-\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{6}a^2$$

$$=\frac{1}{3}a^2$$

(2)

$\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(a,\ 0)$ で $\mathrm{AB}=\sqrt{2}a$ である。

$y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(x,\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2\right)$ から $x+y=a$ に垂線 PQ を下ろし，

$\mathrm{PQ}=h$， $\mathrm{AQ}=t$ $\left(0\leq t\leq\sqrt{2}a\right)$ とすると，微小体積 $dV=\pi h^2dt$ だから，$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}a}h^2dt$

h は点 $\left(x,\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2\right)$ と $x+y-a=0$ の距離であるから，

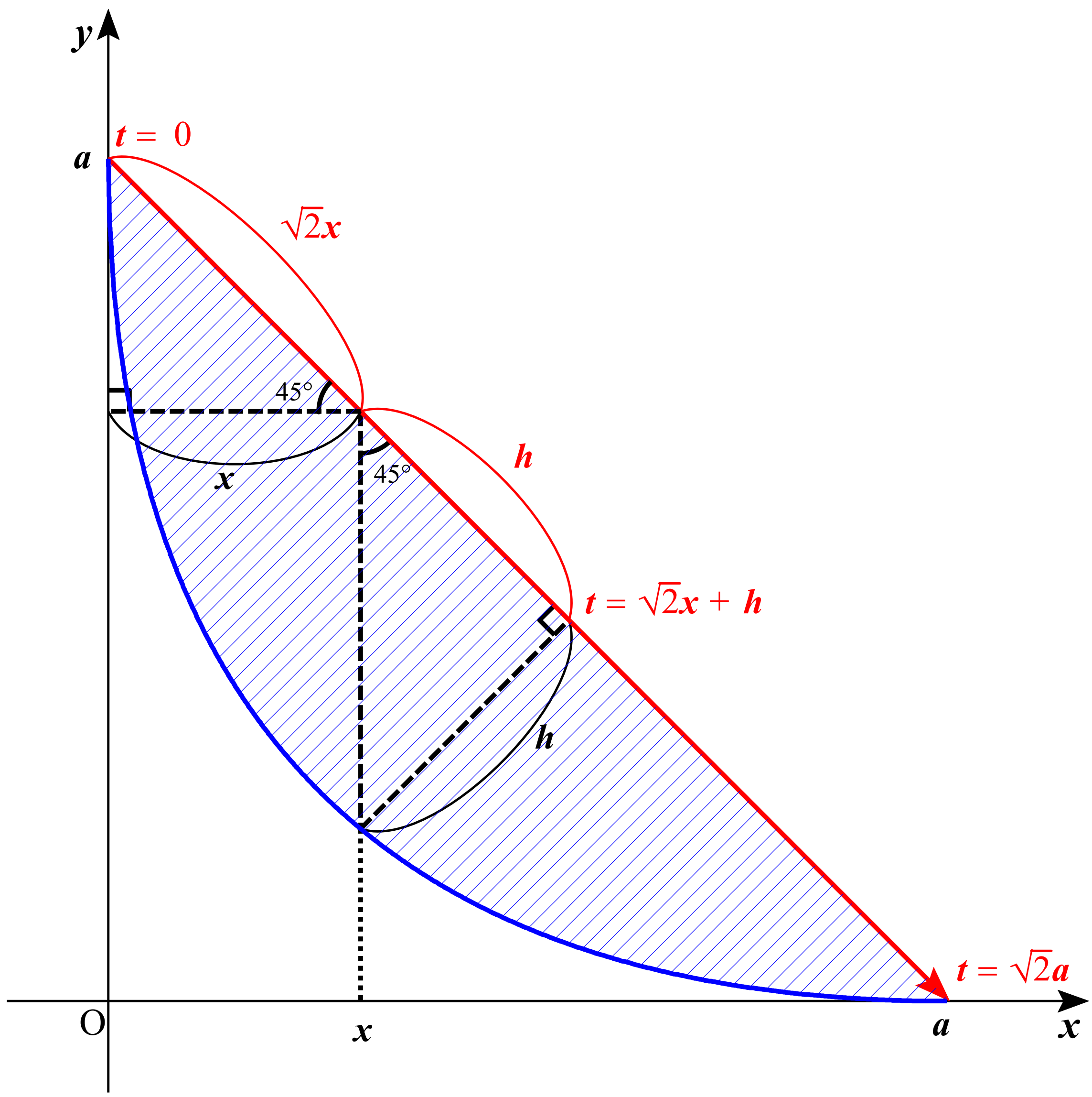
$$h=\frac{\left|x+\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2-a\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}\left(\sqrt{ax}-x\right)\ (\because 0\leq x\leq a)$$

これと，$t=\sqrt{2}x+h$ より，$t=\sqrt{2}x+\sqrt{2}\left(\sqrt{ax}-x\right)=\sqrt{2ax}$ $\quad\therefore dt=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}dx$

また，$t=\sqrt{2}a\Rightarrow x=a,\ t=0\Rightarrow x=0$

$$\begin{aligned}
\therefore V&=\pi\int_0^{\sqrt{2}a}h^2dt\\
&=\pi\int_0^a\left\{\sqrt{2}\left(\sqrt{ax}-x\right)\right\}^2\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}dx\\
&=\pi\sqrt{2a}\int_0^a\left(ax^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{a}x\right)dx\\
&=\pi\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\sqrt{a}x^2\right]_0^a\\
&=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{15}
\end{aligned}$$

参考図



207

(1)

$(u,\ 0,\ 0)$を点 R とすると，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\begin{pmatrix}0\\u\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{1-u^2}\end{pmatrix}$より，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$ より，

△RPQ は$\angle\mathrm{R}=90°$の直角三角形である。

よって，その面積は$\dfrac{1}{2}\mathrm{RP}\cdot\mathrm{RQ}=\dfrac{u\sqrt{1-u^2}}{2}$

または，点 R と線分 PQ の距離をhとすると，$\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot h=\dfrac{1}{2}\sqrt{u^2+1-u^2}\cdot h=\dfrac{h}{2}$

これらより，$\dfrac{h}{2}=\dfrac{u\sqrt{1-u^2}}{2}\qquad\therefore h=u\sqrt{1-u^2}$

(2)

立体を平面$x=u$で切った切断面の面積は

$\mathrm{RQ}\geq\mathrm{RP}$ のとき

$\pi\,\mathrm{RQ}^2-\pi h^2$

また，このとき$\sqrt{1-u^2}\geq u$より，$0\leq u\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{RQ}\leq\mathrm{RP}$ のとき

$\pi\,\mathrm{RP}^2-\pi h^2$

また，このとき$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq u\leq 1$

よって，求める体積をVとすると，

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\pi\,\mathrm{RQ}^2-\pi h^2\right)du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(\pi\,\mathrm{RP}^2-\pi h^2\right)du$$

$$=\pi\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{RQ}^2du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\mathrm{RP}^2du-\int_0^1h^2du\right)$$

$$=\pi\left\{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(1-u^2\right)du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1u^2du-\int_0^1u^2\left(1-u^2\right)du\right\}$$

$$=\pi\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_o^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1-\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

参考図